1

ANALYSE

Exercice 1.1.

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est une fonction de classe C^1, positive et décroissante sur I et que g est continue sur I.

1. On considère la fonction G définie sur I par

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

a) Justifier le fait que G est de classe C^1 sur I.

b) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $G([a, b]) = [m, M]$.

c) Montrer que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)dt.$$

d) En déduire que

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant Mf(a).$$

e) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt.$$

2. On souhaite appliquer la propriété obtenue dans 1. e).

a) On suppose que $a > 0$, montrer que

$$\int_a^b \frac{1 - \cos t}{t} dt \leqslant \frac{2 + b - a}{a}.$$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\sin t}{t^2}dt=0.$

Solution :

1\. a) G est une primitive de la fonction g. Comme g est continue sur $[a,b]$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment.

b) La fonction G étant continue sur un segment, l'image par G de ce segment est un segment $[m,M]$ de $\mathbb{R}$.

c) En intégrant par parties et compte tenu du fait que $G(a)=0$:
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt=\big[fG\big]_a^b-\int_a^b f'(t)G(t)dt=f(b)G(b)-\int_a^b f'(t)G(t)dt.$$

d) On a $m\leqslant G(t)\leqslant M$, donc en multipliant par $-f'(t)$ qui est positif :
$$-f'(t)m\leqslant -f'(t)G(t)\leqslant -f'(t)M$$
puis, en intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) :
$$-m\big(f(b)-f(a)\big)\leqslant -\int_a^b f'(t)G(t)\,dt\leqslant -M\big(f(b)-f(a)\big)$$
et en remplaçant dans la formule obtenue en c) :
$$mf(a)+f(b)\big(G(b)-m\big)\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,dt\leqslant Mf(a)+f(b)\big(G(b)-M\big)$$
Comme $f(b)\geqslant 0$ et $G(b)-m\geqslant 0$, $G(b)-M\leqslant 0$, il vient bien :
$$mf(a)\leqslant\int_a^b f(t)g(t)dt\leqslant Mf(a).$$

e) Si $f(a)=0$, f est la fonction nulle et le résultat est banal.
Sinon, on peut écrire : $\displaystyle\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(t)g(t)\,dt\in[m,M]=G([a,b])$.
Par suite, il existe bien $c\in[a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(a)G(c)=f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

2\. a) On vérifie facilement que l'on est dans les conditions d'application de 1. e), et il existe un point c de $[a,b]$ tel que :
$$\int_a^b\frac{1-\cos t}{t}\,dt=\frac{1}{a}\int_a^c(1-\cos t)\,dt=\frac{1}{a}\big[c-a+\sin a-\sin c\big],\text{ d'où :}$$
$$\int_a^b\frac{1-\cos t}{t}\,dt\leqslant\frac{1}{a}(b-a+2).$$

b) Soit $x>1$; on est encore dans les conditions d'application de 1. e), et il existe $c\in[1/x,1]$ tel que :
$$\frac{1}{x^2}\int_{1/x}^{1}\frac{1}{t}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{1}{x}\int_{1/x}^{c}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

D'où :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^2}\int_{1/x}^{1} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_{1/x}^{c} \frac{\sin t}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_{1/x}^{c} dt = \frac{1}{x}\big(c-\frac{1}{x}\big) \leqslant \frac{1}{x}\big(1-\frac{1}{x}\big)$$

et, par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_{1/x}^{1} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = 0$$

Exercice 1.2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

1. Montrer que f induit une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle à définir. Étudier rapidement les variations de f sur $]-\infty; 0]$ et donner sa représentation graphique.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_n < 0 \text{ et } x_n - x_n^2 = x_{n-1}, \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Déterminer x_1, x_2 et montrer que la suite (x_n) est bien définie.

3. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_n$.

On pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1+u_n), \quad w_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$$

4. a) Etudier la convergence de $\sum u_n$ et déterminer sa somme éventuelle.
 b) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et donner un majorant de sa somme.
 c) Montrer que la suite $(w_n)_n$ admet une limite ℓ et que $2 \leqslant \ell \leqslant 9$.

Solution :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 1-2x$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(\mathbb{R}^-) =]\lim\limits_{-\infty} f, f(0]=]-\infty, 0]$.

Nous noterons cette bijection g.
La représentation graphique de $g = f_{|]-\infty,0]}$ est :

2. On a $x_0 = -2 < 0$ et la deuxième condition s'écrit en fait $x_n = g(x_{n-1})$. Comme g est définie sur $\mathbb{R}^-$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^-$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi parfaitement définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^-$.

$[x_1 - x_1^2 = -2$ et $x_1 < 0]$ donne $x_1 = -1$;

$[x_2 - x_2^2 = -1$ et $x_2 < 0]$ donne $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. On a $\forall n \geqslant 1, x_n - x_{n-1} = x_n^2 \geqslant 0$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Etant majorée par 0, elle converge et si on note ℓ sa limite, un passage à la limite donne $\ell - \ell^2 = \ell^2$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

4. a) Par télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = x_{n+1} - x_0 = x_{n+1} + 2$.

La convergence de la suite (x_n) donne la convergence de la série de terme général u_n, avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 2$$

b) On a $0 \leqslant v_n = \ln(1+u_n) \leqslant u_n$. On en déduit, par la règle de majoration, la convergence de la série de terme général v_n, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \leqslant 2$$

c) On a $\ln(w_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n \leqslant 2$. Donc $w_n \leqslant \mathrm{e}^2 < 9$.

D'autre part $w_n \geqslant w_0 = 1 + u_0 = 2$. Par passage à la limite :

$$2 \leqslant \lim_{n\to\infty} w_n \leqslant 9$$

Exercice 1.3.

1. Étudier la convergence des intégrales

$$J = \int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{1+x}dx \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{S_n}{n}$$

a) Déterminer un équivalent de u_n (on pourra comparer S_n à une intégrale).

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Exprimer I_n à l'aide de u_{n+1} (on pourra faire une intégration par parties convenablement choisie).

b) En déduire la limite, pour $n \to +\infty$, de l'intégrale

$$R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x}dx$$

c) Montrer alors que la série de terme général $(-1)^n u_{n+1}$ converge et que

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_{n+1}$$

Solution :

1. $\star$ La fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{1+x}$ est continue sur $[0,1[$, positive, et équivalente au voisinage à gauche de 1 à $-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$.

La convergence de $\displaystyle\int_0 \ln t\, dt$ donne la convergence de $\displaystyle\int^1 \ln(1-x)\, dx$, donc la convergence de J.

$\star$ De même $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue, de signe fixe, sur $[0,1[$ et équivalente au voisinage à gauche de 1 à $x \mapsto \ln(1-x)$. On conclut, pour la même raison, à la convergence de I_n.

2. a) Par comparaison série–intégrale et décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on a pour tout $k \geqslant 1$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ et pour tout $k \geqslant 2$: $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$.

D'où, par sommation : $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$, ce qui s'écrit encore :

$$1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Soit, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$ et $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

b) On a $S_n \geqslant 1$, donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la série de terme général u_n est divergente.

3. a) Intégrons par parties, en choisissant de « primitiver » $x \mapsto x^n$ en $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}-1}{n+1}$
(c'est mieux pour la borne supérieure) :

Pour $a \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}\int_0^a x^n \ln(1-x)\, dx &= \left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-x)\right]_0^a - \int_0^a \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(x-1)}\, dx \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-a) - \frac{1}{n+1}\int_0^a (1+x+\cdots+x^n)\, dx\end{aligned}$$

On a $(a^{n+1}-1)\ln(1-a) = (1+a+\cdots+a^n)(a-1)\ln(1-a) \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} 0$

On peut donc faire tendre a vers 1, et :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\, dx = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = -u_{n+1}.$$

b) L'intégrale R_n converge pour les mêmes raisons qu'en 1., et :

$$|R_n| = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln(1-x)}{1+x}\,dx \leqslant -\int_0^1 x^{n+1}\ln(1-x)\,dx = u_{n+2}$$

Puisque $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, et par conséquent : $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

c) Pour $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

En multipliant par $-\ln(1-x)$ et en intégrant sur $[0,1[$ (toutes les intégrales convergent), il vient :

$$J = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - R_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_{k+1} - R_n$$

Le passage à la limite lorsque n vers l'infini montre que la série proposée converge, avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_{k+1} = J.$$

Exercice 1.4.

1. On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a,b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a,b]$.

a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$.

b) Prouver que

$$m\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant M\int_a^b g(t)dt.$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

2. Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0,1]$.

a) Montrer que l'espérance $E(X)$ de X appartient à l'intervalle $[0,1]$.

b) On considère la variable aléatoire $Y = \exp(X)$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$E(Y) = \exp(c).$$

3. En utilisant la formule établie en 1.c), étudier la limite de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}dt$$

lorsque x tend vers 0^+.

Solution :

1. a) La fonction f est continue. Le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$.

b) Soit $t \in [a, b]$. On sait que : $m \leqslant f(t) \leqslant M$.
La fonction g étant positive sur $[a, b]$, il vient, pour tout $t \in [a, b]$:

$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

Il suffit ensuite d'intégrer ces deux inégalités sur l'intervalle $[a, b]$ et d'utiliser la propriété de positivité de l'intégrale (on a $a < b$) pour obtenir le résultat désiré.

c) Si la fonction g est identiquement nulle, l'égalité proposée est évidente. Sinon, la fonction g étant positive et continue , on sait que $\displaystyle\int_a^b g(t)dt > 0$. Ainsi :

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant M$$

Enfin, d'après la question 1. a), il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

2. a) Comme X prend ses valeurs entre 0 et 1, on peut choisir une densité f_X nulle en dehors de cet intervalle et :

$$0 \leqslant E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_X(x)\,dx = 1$$

b) Par le théorème du transfert, on sait que : $E(Y) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f_X(x)\,dx$.

Par la question 1. c), il existe $c \in [0, 1]$ tel que $E(Y) = \mathrm{e}^c \displaystyle\int_0^1 f_X(x)\,dx = \mathrm{e}^c$.

3. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur l'intervalle $[x, 2x]$, la fonction F est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus cette fonction est positive pour $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$. Par la question 1.c) , il existe alors $c \in [x, 2x]$ tel que :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\sin c}{c}\,\frac{2x - x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin c}{c}\sqrt{x}$$

Lorsque x tend vers 0, c également et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin c}{c} = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$.

On peut même préciser : $F(x) \underset{(0^+)}{\sim} \sqrt{x}$.

Exercice 1.5.

Soit $P = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 2$, à coefficients réels.

1. Montrer que pour toute racine réelle ou complexe λ de P, on a :

$$|\lambda| \leqslant M = \max\big(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\big)$$

(on pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $|\lambda| > M$ alors $|P(\lambda)| > 0$).

2. On suppose dans la suite que toutes les racines de P sont réelles. Montrer qu'alors toutes les racines de P' sont elles aussi réelles. On notera $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$ les différentes racines de P et $m_1, \ldots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

3. Soit α la plus grande racine de P, $I =]\alpha, +\infty[$ et $J = [\alpha, +\infty[$. Montrer que les fonctions $P, P', \ldots, P^{(n)}$ sont strictement positives sur I.

4. On suppose que α est racine simple de P. Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

a) Montrer que g est de classe C^∞ sur J.

b) Montrer que $g'(\alpha) = 0$.

5. On suppose toujours que α est racine simple de P.

a) Montrer que g est strictement croissante sur J et que $g(J) \subseteq J$.

b) Soit $x_0 > M$. On définit la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.
Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante (on pourra montrer que $g(x) < x$ pour tout $x \in I$) et qu'elle converge vers α.

Solution :

1. Soit λ une racine réelle ou complexe de P. On peut écrire

$$\lambda^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k, \text{ d'où } |\lambda|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\lambda|^k$$

Supposons que $|\lambda| > M = \max\big(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\big)$. En particulier $|\lambda| > 1$ et donc :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\lambda|^{k-n+1} < \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

en contradiction avec $|\lambda| > M$.

2. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives $(m_1, \ldots, m_r)$.

On sait donc que $\sum_{k=1}^{r} m_k = n$. On sait également que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sont des racines de P' de multiplicités respectives $(m_1 - 1, \ldots, m_r - 1)$ (si $m_i = 1$, alors λ_i n'est pas racine de P' et le résultat reste valable).

Le théorème de Rolle nous assure également qu'entre deux racines de P se trouve au moins une racine de P', c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, il existe $\mu_k \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, tel que $P'(\mu_k) = 0$.

En comptant les multiplicités, cela donne déjà $\sum_{k=1}^{r} (m_k - 1) + (r - 1) = n - 1$ racines de P', qui sont toutes réelles. Ainsi il n'en existe pas d'autres et en fait entre deux racines de P il n'existe qu'une racine de P' et elle est simple.

3. Le raisonnement de la question précédente montre que sur $I =]\alpha, +\infty[$, P et P' ne s'annulent pas. Comme de plus, $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} P'(x) = +\infty$ (car le coefficient dominant est positif), alors P et P' restent positives sur I.

Il suffit d'appliquer ce raisonnement aux dérivées successives de P, jusqu'à $P^{(n)}$.

4. a) Comme α est racine simple de P, on a $P'(\alpha) \neq 0$. Cela entraîne que g est de classe C^∞ sur $J = [\alpha, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions C^∞, avec $P'(x) \neq 0$, pour tout $x \in J$.

b) Un calcul immédiat donne $g'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{P'^2(x)}$ et $g'(\alpha) = 0$

5. a) On sait que pour tout $x \in J, g'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{P'^2(x)}$.

Par la question 3, g' reste positive sur J et g est croissante sur J ; de plus $g(\alpha) = \alpha$. Il en résulte que $g(J) \subseteq J$.

b) Puisque $x_0 > M$, on a $x_0 \in I$. Par la question précédente, la suite (x_n) est bien définie et comme P et P' sont positives sur I, la suite (x_n) est strictement décroissante. Elle est de plus minorée par α ; elle converge donc vers le point fixe de g (qui est continue) qui est α.

Exercice 1.6.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 - t^2} \ln(t) dt$$

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que la fonction g définie sur $]0, 1[$ par :

$$g(t) = \frac{t^3}{1 - t^2} \ln(t)$$

est bornée sur cet intervalle.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.

3. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{p} t^{2k}$.

b) En déduire que

$$I_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2k+2)^2}$$

4. a) Montrer que la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \frac{1}{(n+2t)^2}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que :

$$-\frac{1}{(n+2)^2} - I_n \leqslant \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \leqslant -I_n$$

c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Pour tout entier naturel n, $h : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}$ est continue sur $]0,1[$, et :

Au voisinage de $t=1$, $h(t) \sim \dfrac{t-1}{1-t^2} \sim -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0$. La fonction h admet donc un prolongement par continuité sur $[0,1]$.

Ainsi I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) La fonction g correspond à $n=2$. On vient de voir qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$; elle est donc bornée sur $]0,1[$.

b) Comme $\dfrac{\ln t}{1-t^2} \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,1[$, il est clair que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et minorée par 0. Cette suite admet donc une limite.

Cette limite est nulle. En effet, notons $M = \sup\limits_{t\in]0,1[} |g(t)|$. Alors, pour $n \geq 3$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant M\int_0^1 t^{n-2}dt = \frac{M}{n-1}$$

3. a) Il s'agit de la somme partielle d'une suite géométrique de raison t^2. Donc :

$$\sum_{k=0}^{p} t^{2k} = \begin{cases} \dfrac{1-t^{2p+2}}{1-t^2} & \text{si } t^2 \neq 1 \\ p+1 & \text{si } t^2 = 1 \end{cases}$$

b) On peut écrire, pour $t \in]0,1[$:

$$\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{p} t^{2k+n+1}\ln t + \frac{t^{2p+3+n}\ln t}{1-t^2}$$

Or pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, une intégration par parties élémentaire montre que l'intégrale suivante existe, avec :

$$\int_0^1 t^\ell \ln t\, dt = \frac{1}{(\ell+1)^2}$$

Ainsi, toutes les intégrales existant :

$$I_n = -\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k+n+2)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2p+n+3}}{1-t^2}\ln t\, dt$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{2p+n+3}}{1-t^2}\ln t\, dt\right| \leqslant M\int_0^1 t^{2p+n}\, dt = \frac{M}{2p+n+1}$$

On fait tendre p vers l'infini et on obtient :

$$I_n = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+n+2)^2}$$

4. a) La fonction f_n est dérivable et sa dérivée est négative sur $\mathbb{R}^+$.

b) Par décroissance de la fonction à intégrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\frac{1}{(2k+2+n)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(2t+n)^2} \leqslant \frac{1}{(2k+n)^2}$$

On somme pour $k \in \mathbb{N}$; il vient :

$$-I_n \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2t+n)^2} = \frac{1}{2n} \leqslant -I_n + \frac{1}{n^2}$$

Cela signifie que, lorsque n tend vers l'infini : $I_n \sim -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 1.7.

1. a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\, dt$$

est convergente.

Pour $x \in D$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\, dt$

b) Pour $x \in D$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\, du$ est convergente et comparer sa valeur à $f(x)$.

2. a) Montrer que les fonctions g et h définies sur D par

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{x+u}\,du \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du$$

sont bornées sur D.

b) En déduire que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$f(x) \sim -\ln(x)$$

3. a) Montrer que $\forall (x,u) \in D \times \mathbb{R}^+, 0 \leq \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+u} \leq \dfrac{u}{x^2}$

b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution :

1. a) Pour tout x réel, $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

- si $x \leqslant 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{1+t}$, qui est positive et d'intégrale divergente en $+\infty$.
- si $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} = o(\mathrm{e}^{-xt}) = o\big(\dfrac{1}{t^2}\big)$ dont l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$.

Finalement $D = \mathbb{R}^{+*}$.

b) Si $x > 0$, $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{x+u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $A > 0$. Le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{x}$ donne

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du = \int_0^{A/x} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$$

Cette dernière expression tend vers $f(x)$, lorsque A tend vers $+\infty$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du$ existe et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du = f(x)$$

2. a) L'application $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{x+u}$ est continue sur $[0,1]$, car $x > 0$. L'application $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} = o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$.

Ainsi g et h sont bien définies sur $\mathcal{D}$.

Posons $a : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-u} - 1}{u} & \text{si } u > 0 \\ -1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$

La fonction a est continue sur $[0,1]$. De plus, pour tout $u \in [0,1]$:

$$a(u) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{x+u} \leqslant 0 \implies M = \int_0^1 a(u)\,du \leqslant g(x) \leqslant 0$$

Enfin, pour tout $u \geqslant 1$

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \implies 0 \leqslant h(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du = M'.$$

b) D'après la relation de Chasles, pour $x > 0$, il vient :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{du}{x+u} + g(x) + h(x) = -\ln x + \ln(x+1) + g(x) + h(x)$$

Or, au voisinage de 0^+, $\ln(x+1) + g(x) + h(x)$ est bornée.
Donc, comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, on a $f(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0^+.

3. a) Si $(x,u) \in D \times \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+u} = \frac{u}{x(x+u)} \implies 0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x+u} \leqslant \frac{u}{x^2}$$

b) En multipliant l'encadrement précédent par $\mathrm{e}^{-u} > 0$, puis en intégrant sur $\mathbb{R}^+$, il vient, pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,du - f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} u.\mathrm{e}^{-u}\,du$$

ou

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

ce qui prouve, qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$.

Exercice 1.8.

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^1 \ln(1 + xt^2)\,dt$$

1. Montrer que F est définie sur $]-1,+\infty[$ et croissante sur cet intervalle.

2. a) Montrer que pour tout $u > 0$ et tout réel k non nul tel que $0 < u - |k|$, on a

$$\left|\ln(u+k) - \ln u - \frac{k}{u}\right| \leqslant \frac{k^2}{2(u-|k|)^2}$$

b) Pour tout réel $x > -1$ et tout réel h non nul tel que $-1 < x - |h|$, on pose :

$$D(x,h) = \frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x) - h\int_0^1 \frac{t^2}{1+xt^2}\,dt\right]$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout h tel que $|h| < x$, on a :

$$\left|D(x,h)\right| \leqslant \frac{|h|}{10}$$

Montrer que pour tout x de $]-1,0]$ et tout h tel que $|h| < x+1$, on a :

$$\big|D(x,h)\big| \leqslant \frac{|h|}{10(1+x-|h|)^2}$$

c) En déduire que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et donner une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.

Solution :

1. Pour tout $x > -1$ et $t \in [0,1]$, $1 + xt^2 > 0$. L'application $t \mapsto \ln(1+xt^2)$ est donc définie et continue sur $[0,1]$, ce qui montre que F est définie sur $D =]-1,+\infty[$.

Soit $-1 < x < x'$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\ln(1+xt^2) \leqslant \ln(1+x't^2)$, ce qui montre, par conservation des inégalités par intégration ($0 < 1$!), que F est croissante sur D.

2. a) Si $u > 0$, $0 < u - |k|$, alors $-u < k < u$ et $\ln(u+k)$ est bien définie.

L'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$\big|\ln(u+k) - \ln u - \frac{k}{u}\big| \leqslant \frac{k^2}{2} \sup_{t\in[u,u+k]} \frac{1}{t^2}.$$

• Si $k > 0$ et $u \leqslant t \leqslant u+k$, alors $0 < u-|k| \leqslant t \leqslant u+k$, donc $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{(u-|k|)^2}$.

• Si $k < 0$ et $u+k \leqslant t \leqslant u$, alors $0 < u-|k| \leqslant t \leqslant u$, donc $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{(u-|k|)^2}$.

Finalement :

$$\big|\ln(u+k) - \ln u - \frac{k}{u}\big| \leqslant \frac{k^2}{2(u-|k|)^2}$$

b) Posons $u = 1+xt^2$, $k = ht^2$. On a $u > 0$ et $u - |k| = 1 + (x-|h|)t^2 > 0$. En utilisant la question précédente, il vient :

$$|D(x,h)| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^1 \frac{h^2t^4}{2(1+(x-|h|)t^2)^2}\,dt$$

Si $x > 0$ et $|h| < x$, alors $1 + (x-|h|)t^2 \geqslant 1$, donc :

$$|D(x,h)| \leqslant \frac{1}{2|h|}\int_0^1 h^2t^4 dt = \frac{|h|}{10}$$

Si $-1 < x \leqslant 0$ et $|h| < x+1$, alors pour $t \in [0,1]$, $1+(x-|h|)t^2 \geqslant 1+x-|h| > 0$ et

$$|D(x,h)| \leqslant \frac{1}{2|h|}\int_0^1 \frac{h^2t^4}{(1+x-|h|)^2}\,dt \leqslant \frac{|h|}{10(1+x-|h|)^2}$$

c) En remarquant que $\lim\limits_{h\to 0} D(x,h) = 0$, on déduit que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+xt^2}\,dt.$$

Exercice 1.9.

Soit $(\Gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\Gamma_0 = 1,\, \Gamma_1 = X,\, \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2},\, \dots,\, \Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

1. a) Montrer que pour tout x entier relatif, $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif.

b) Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.

2. Soit x un réel fixé, différent d'un entier naturel.

a) Soit ρ un réel. On considère la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mu_n = n^\rho|\Gamma_n(x)|$. Montrer que

$$\ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n) = \frac{\rho - x - 1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En déduire la nature de la série de terme général $\ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$ en fonction du réel ρ.

b) Montrer qu'il existe un réel strictement positif $K(x)$ tel que l'on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x+1}|\Gamma_n(x)| = K(x)$$

On ne cherchera pas à calculer $K(x)$.

3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et x, y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. A l'aide de 2. b), montrer que si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\Gamma_n(x)$ est absolument convergente, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\Gamma_n(y)$ est également absolument convergente.

Solution :

1. a) C'est immédiat lorsque $k = 0$, et lorsque $k = 1$, puisque $\Gamma_0 = 1, \Gamma_1 = X$. On remarque ensuite que, pour $k \geqslant 2$:

$$\Gamma_k(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant k-1 \\ \dbinom{j}{k} \in \mathbb{N} & \text{si } j \geqslant k \\ (-1)^k \dbinom{-j+k-1}{k} \in \mathbb{Z} & \text{si } j \leqslant 0 \end{cases}$$

b) On a immédiatement $\Gamma_k(k) = 1$ et $\Gamma_k(-1) = (-1)^k$.

2. a) Comme x n'est pas un entier naturel, on a $\Gamma_n(x) \neq 0$ et $\mu_n > 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n &= \ln\big(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\big) = \rho \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big) + \ln\big|\frac{x-n}{n+1}\big| \\ &= (\rho - 1)\ln\big(1 + \frac{1}{n}\big) + \ln\big|1 - \frac{x}{n}\big| \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, le développement de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 donne

$$\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = \frac{\rho - 1 - x}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$$

• Si $\rho = 1 + x$, alors $\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$, ce qui prouve que la série $\sum(\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n)$ est absolument convergente.

• Si $\rho \neq 1+x$, alors $\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n \sim \dfrac{\rho - 1 - x}{n}$ qui est de signe constant et le terme général d'une série divergente. Donc $\sum(\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n)$ est divergente.

b) Lorsque $\rho = x + 1$, la série $\sum(\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n)$ est absolument convergente. Donc, il existe $\ell(x)$ tel que :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n) = \lim_{N \to +\infty} (\ln \mu_{N+1} - \ln \mu_0) = \ell(x).$$

La suite $(\ln \mu_n))$ est ainsi convergente vers $\ell(x)$ et par continuité de la fonction exponentielle, la suite (μ_n) converge vers $\mathrm{e}^{\ell(x)} = K(x) > 0$.
Donc, il existe $K(x) > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{x+1} |\Gamma_n(x)| = K(x).$$

3. Par hypothèse, $\Gamma_n(x) \neq 0, \Gamma_n(y) \neq 0$ et la série $\sum a_n \Gamma_n(x)$ est absolument convergente.
Par la question précédente

$$\frac{|\Gamma_n(y)|}{|\Gamma_n(y)|} \sim \frac{K(y)}{K(x)} \times \frac{1}{n^{y-x}}.$$

Comme $y > x$, ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et pour n assez grand $|\Gamma_n(y)| < |\Gamma_n(x)|$.

La série $\sum a_n \Gamma_n(x)$ est donc absolument convergente.

Exercice 1.10.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{(u_n + 1)u_n}, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{x(x+1)}$$

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b) Résoudre l'équation : $f(x) = x$.

c) En déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_n = \int_{u_n}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

a) Étudier l'existence de v_n.

b) Calculer v_0.

c) Pour tout $x > 0$, montrer que : $\dfrac{f'(x)}{f(x)\sqrt{1+f(x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x+1}}$.

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et calculer son terme général v_n en fonction de n.

3. a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \sim \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

b) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) On montre, par une récurrence immédiate que, pour tout $n \geqslant 0$, u_n est bien défini, avec $u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc bien définie.

b) $f(x) = x \iff x + \sqrt{x(x+1)} = 0$. La seule solution de l'équation $f(x) = x$ est $x = 0$.

c) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, donc vaut 0.
Or pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} \geqslant 2u_n \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante et minorée par 1 : elle ne converge donc pas.
Comme elle est croissante, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $h(t) \sim \dfrac{1}{t^{3/2}}$. Comme $u_n \geqslant 1 > 0$, l'intégrale définissant (v_n) est donc convergente et la suite (v_n) bien définie.

b) Le changement de variable $u = \sqrt{1+t}$ est bijectif de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. Ainsi :

$$v_0 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2du}{u^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \Big(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\Big)\, du = 2\ln(1+\sqrt{2})$$

c) On remarque que $f(x) + 1 = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2$. Ceci permet d'écrire, après calcul de $f'(x)$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)+1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

d) La fonction f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, strictement croissante. En posant $x = f(z)$, il vient :

$$v_n = \int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 2\int_{f(u_n)}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z+1}} = 2\int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z+1}} = 2v_{n+1}$$

D'où, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = \big(\frac{1}{2}\big)^n \times v_0 = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2^{n-1}}$$

3. a) On a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$. D'autre part

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} = 2\int_{\sqrt{x+1}}^{+\infty} \frac{dz}{z^2-1} = \ln\big(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\big)$$

$$= \ln\big(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\big) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} + o\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big) \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$$

b) Finalement :

$$\int_{u_n}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{u_n}} \sim \int_{u_n}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} = v_n = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2^{n-1}}.$$

D'où, lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \sim \frac{4^n}{(\ln(1+\sqrt{2}))^2}.$$

Exercice 1.11.

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note : $\sinh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et l'on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sinh(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1} & \text{si } x > 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de α, f_n est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

On suppose dans la suite que α a la valeur ainsi trouvée.

2. Montrer que f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente.

4. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall p \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 2\sinh(x)\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{-nkx} + \mathrm{e}^{-npx} f_n(x)$.

b) En déduire que $I_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sinh(x).\mathrm{e}^{-nkx}dx$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sinh(x).\mathrm{e}^{-nkx}dx$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

d) Pouvait-on obtenir ce dernier résultat directement ?

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \sinh(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{nx} - 1$. Un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$f_n(x) = \frac{2x + o(x)}{nx + o(x)}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = \dfrac{2}{n}$.

Il faut donc prendre $\alpha = \dfrac{2}{n}$ pour que f_n soit continue en 0.

2. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$; elle est donc bornée sur tout segment $[0, A], A > 0$. On a, de plus, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \sim \mathrm{e}^{(1-n)x}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ (on a $n \geqslant 2$).

Ainsi f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On notera M_n un majorant de f_n.

3. Par la question précédente, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \sim \mathrm{e}^{(1-n)x}$. Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(1-n)x}\, dx = \frac{1}{n-1},$$

cela entraîne que l'intégrale définissant I_n est convergente pour tout $n > 1$.

4. a) On peut écrire, pour $x > 0$:

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{-nkx} = \mathrm{e}^{-nx} \frac{1 - \mathrm{e}^{-npx}}{1 - \mathrm{e}^{-nx}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-npx}}{\mathrm{e}^{nx} - 1}$$

Donc :

$$2 \sinh(x) \sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{-nkx} = f_n(x) - \mathrm{e}^{-npx} f_n(x)$$

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = 2 \sum_{k=1}^{p} \int_0^{+\infty} \sinh(x) \mathrm{e}^{-nkx}\, dx + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-npx} f_n(x)\, dx$$

Puis

$$\left| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-npx} f_n(x)\, dx \right| \leqslant M_n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-npx}\, dx = \frac{M_n}{np}$$

Donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-npx} f_n(x) dx = 0$, ce qui entraîne que :

$$I_n = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sinh(x) \mathrm{e}^{-nkx}\, dx$$

c) On écrit que $\sinh(x)\mathrm{e}^{-nkx} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\right)$. Donc :

$$2 \int_0^{+\infty} \sinh(x) \mathrm{e}^{-nkx}\, dx = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x})\, dx$$

$$= \frac{1}{kn-1} - \frac{1}{kn+1} = \frac{2}{k^2n^2-1}.$$

Finalement : $I_n = 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2n^2-1}$.

Pour $n = 2$, il vient : $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}-1} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

d) Pour retrouver ce résultat directement, on écrit :

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)$$

et, pour tout N : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2N+1}\Big)$

Il suffit alors de prendre la limite lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 1.12.

1. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_k = \dfrac{1}{k^3}$.

Établir la convergence des séries de termes généraux respectifs, u_k et $(-1)^{k-1}u_k$. On note S et S' leurs sommes respectives.

2. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}u_k$.

a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n = S'_{2n-1}$ et $w_n = S'_{2n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ sont adjacentes et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a

$$S'_{2n} \leqslant S' \leqslant S'_{2n+1} \leqslant S'_{2n-1}.$$

b) En déduire un entier n tel que S'_n soit une valeur approchée rationnelle de S' à 10^{-1} près. Faire de même pour une valeur approchée (au sens large) à 10^{-3} près.

3. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = S - S_n$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, comparer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3}$ au rationnel $\dfrac{1}{(k+1)^3}$ et en déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout p de $\mathbb{N}^*$ une majoration de la différence $R_n - R_{n+p}$ par une intégrale.

b) En déduire un n de $\mathbb{N}^*$ tel que S_n soit une valeur approchée rationnelle par défaut de S à 10^{-3} près.

4. a) Montrer que pour tout (p, ε) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $H_{p,\varepsilon}$ défini par :

$H_{p,\varepsilon} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid R_n - R_{n+p} \leqslant \varepsilon\}$ admet un plus petit élément.

b) On appelle $\varphi(p,\varepsilon)$ cet entier. Montrer que $\varphi(p,\varepsilon) \geqslant \lfloor \sqrt[3]{\frac{p}{\varepsilon}} \rfloor - p$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

c) Écrire en Pascal une fonction qui à tout (p,ε) avec $p \geqslant 2$, associe $\varphi(p,\varepsilon)$ *(on sera attentif au nombre d'opérations effectuées).*

Solution :

1. D'après la règle de Riemann, les séries $\sum u_k$ et $\sum (-1)^k u_k$ sont absolument convergentes.

2. a) On a :

$$v_{n+1} - v_n = S'_{2n+1} - S'_{2n-1} = \frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{(2n)^3} < 0$$
$$w_{n+1} - w_n = S'_{2n+2} - S'_{2n} = -\frac{1}{(2n+2)^3} + \frac{1}{(2n+1)^3} > 0$$

et $|v_n - w_n| = \dfrac{1}{(2n)^3}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Les suites (v_n) et (w_n) sont donc adjacentes et ont une limite commune S'.
Pour tout n, on a $w_n \leqslant S' \leqslant v_n$, donc, par la monotonie des deux suites

$$S'_{2n} \leqslant S' \leqslant S'_{2n+1} \leqslant S'_{2n-1}.$$

b) On cherche n tel que $|S' - S'_n| \leqslant \varepsilon$. Or

$$|S' - S'_{2n}| \leqslant |S'_{2n+1} - S'_{2n}| = u_{2n+1}, \quad |S' - S'_{2n-1}| \leqslant |S'_{2n} - S'_{2n-1}| = u_{2n}$$

soit, pour tout $n \geqslant 1$, $|S' - S'_n| \leqslant u_{n+1}$.

Pour $\varepsilon = 10^{-1}$, on prend $n = 2$ et $S'_2 = \dfrac{7}{8}$ est une valeur approchée de S' à 10^{-1} près.

Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, on prend $n = 9$ et S'_9 est une valeur approchée de S' à 10^{-3} près.

3. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^3} = \frac{1}{(k+1)^3}$.
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il vient :

$$R_n - R_{n+p} = S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} = \int_n^{n+p} \frac{dt}{t^3}$$
$$R_n - R_{n+p} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

b) Le résultat précédent étant valable pour tout p, il suffit de faire tendre p vers l'infini pour obtenir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$R_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Il suffit de prendre $2n^2 \geqslant 10^3$, soit $n = 23$ et S_{23} est une valeur approchée de S par défaut à 10^{-3} près.

4. a) Pour p fixé, on pose $t_n = R_n - R_{n+p} = S_{n+p} - S_n$. La suite (t_n) est positive et de limite nulle. Donc $H_{p,\varepsilon}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}^*$ et admet donc un plus petit élément.

b) Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,on a : $t_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} u_{n+p} = \dfrac{p}{(n+p)^3}$.

Ainsi $\dfrac{p}{(n+p)^3} > \varepsilon \implies t_n > \varepsilon$ et donc

$$\frac{p}{(\varphi(p,\varepsilon)+p)^3} \leqslant \varepsilon, \text{ soit } \varphi(p,\varepsilon) \geqslant \left\lfloor \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/3} \right\rfloor - p$$

c) Comme $t_{n+1} = t_n - u_{n+1} + u_{n+p+1}$, on peut proposer

```
Function f (p : integer ; e :real) : integer ;
Var i,n : integer ;
    t : real ;
Begin
n := trunc(exp((ln(p/e))/3))-p ;
t := 1/(n+1)^3 ;
For i := 2 to p do t := t+1/(n+i)^3 ;
While t>e do
   Begin
   n := n+1 ;
   t := t+1/n^3+1/(n+p)^3
   End ;
f := n
End.
```

Exercice 1.13.

À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ soit convergente, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout $x > 0$.

2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a < b$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt \leqslant a^2 g(a) + 2\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}$.

c) En déduire que

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}.$$

d) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt$ est convergente (on pourra utiliser le fait que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en l'infini).

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ est absolument convergente et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt.$$

Solution :

1. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.

Étudions la continuité de g en $x = 0$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (puisque f est continue) et $F'(x) = f(x)$. La fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 en $x = 0$, et :

$$F(x) = F(0) + xf(x) + x\varepsilon(x) = xf(x) + x\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi : $g(x) = \dfrac{1}{x}F(x) = f(x) + \varepsilon(x)$. Cela entraîne que :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = f(0).$$

Ainsi, en posant $g(0) = f(0)$, g est continue en 0.

Pour tout $x > 0$: $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - g(x)}{x}$.

2. a) Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^b 1\cdot g^2(t)\,dt &= \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b tg(t)g'(t)\,dt \\
&= \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b g(t)\big(f(t) - g(t)\big)dt \\
&= \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt + 2\int_a^b g^2(t)\,dt
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant ag^2(a) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à cette dernière expression et la positivité de f^2 donnent :

$$\int_a^b g^2(t)\,dt \leqslant ag^2(a) + 2\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant ag^2(a) + 2\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

c) On en déduit que

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}\right)^2 - 2\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} \leqslant ag^2(a)$$

ou

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} - \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}\right)^2 \leqslant ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

soit, finalement

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}$$

d) Cette dernière inégalité est valable pour tout $a > 0$. En prenant la limite lorsque a tend vers 0, il vient pour tout $b > 0$:

$$\int_0^b g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

La positivité de g^2 et cette inégalité entraînent que $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b g^2(t)\,dt$ existe et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

3. Soit $A > 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\int_0^A |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^A g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^A f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Comme précédemment, cela entraîne que $\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|\,dt$ existe.

Reprenons l'égalité de la question 2. a) :

$$\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

On a $\lim\limits_{a\to 0} ag^2(a) = 0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} bg^2(b)$ existe, car :

$$\lim_{b\to+\infty} bg^2(b) = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt - \int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt.$$

Cette limite λ ne peut être que nulle, car si $\lambda \neq 0$, alors, pour t au voisinage de $+\infty$, $g^2(t) \sim \dfrac{\lambda}{t}$, l'intégrale de cette dernière fonction étant divergente en $+\infty$. Finalement

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt.$$

Exercice 1.14.

Soit un réel $a \in [0,1]$. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}$.

On pose par commodité $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Que peut-on dire de cette suite si $a = 0$? si $(u_0, u_1) = (0,0)$?

2. On suppose que $a = 1$.

a) Comment fait-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour exprimer u_n en fonction de n ? *On n'effectuera pas les calculs.*

On admet que, si $(u_0,u_1) = (1,0)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}}$ et que, si $(u_0,u_1) = (0,1)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

b) Pour quels couples $(u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Quelle est en ce cas sa limite ?

On suppose dans toute la suite que $a \neq 0$ et que $(u_0,u_1) \neq (0,0)$.

3. On suppose dans cette question que $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$ et que $0 < a < 1$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et qu'elle croît sur $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_{n+1} \leqslant (1+a^n)\,u_n \leqslant \mathrm{e}^{a^n} u_n$. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \mathrm{e}^{a^2/(1-a)} u_2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On note $\ell(a, u_0, u_1)$, ou plus simplement $\ell(a)$, sa limite.

Montrer que $\ell(a) > 0$.

d) Soit un entier $p \geqslant 2$. Montrer que, pour $n > p$, $u_n - u_p = \sum\limits_{k=p}^{n-1} a^k u_{k-1}$

e) Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$, $\dfrac{u_{p-1}a^p}{1-a} \leqslant \ell(a) - u_p \leqslant \dfrac{\ell(a)a^p}{1-a}$.

En déduire que, quand p tend vers $+\infty$, $\ell(a) - u_p \sim \dfrac{\ell(a)a^p}{1-a}$.

f) Montrer que $\ell(a) \geqslant \dfrac{a^3 u_2}{1-a}$.

Le couple (u_0,u_1) étant fixé, quelle est la limite de $\ell(a)$ quand a tend vers 1 par valeurs inférieures ?

4. On suppose seulement que $0 < a < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution :

1. Si $a = 0$, la suite (u_n) est stationnaire à partir du rang 1 et vaut u_1.
   Si $(u_0, u_1) = (0, 0)$, la suite (u_n) est identiquement nulle.

2. a) Si $a = 1$, la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Pour exprimer u_n en fonction de n, on se reportera au cours !

b) Par linéarité, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + u_1 \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} \phi^{n-1} - \frac{u_0 + \psi u_1}{\sqrt{5}} \psi^{n-1}$$

Comme $|\psi| < 1 < |\phi|$, il vient :

• si $\dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} \neq 0$, alors $|u_n| \sim \dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} \phi^{n-1}$ et la suite (u_n) diverge.

• si $\dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} = 0$, alors $|u_n| \sim -\dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} \psi^{n-1}$ et la suite (u_n) tend vers 0.

3. a) La positivité et la croissance de la suite (u_n) s'établissent sans peine par récurrence.

b) Pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n-1} \leqslant u_n$ et donc $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1} \leqslant (1 + a^n) u_n$.
Enfin, comme pour $x > 0, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, il vient $u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{a^n} u_n$.
Par récurrence, et comme $0 < a < 1$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 2$

$$u_n \leqslant \exp\Big(\sum_{k=2}^{n} a^k\Big) u_2 \leqslant \exp\Big(\sum_{k=2}^{+\infty} a^k\Big) u_2 = \mathrm{e}^{a^2/(1-a)} u_2.$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge vers une limite $\ell(a) \geqslant u_2 > 0$.

d) On sait que $u_{k+1} - u_k = a^k u_{k-1}$. Donc pour tout $n > p$:

$$u_n - u_p = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=p}^{n-1} a^k u_{k-1}.$$

e) Soit $p \geqslant 2$.
On sait que la série $\sum a^k u_{k-1}$ est convergente, puisque $0 < a^k u_{k-1} \leqslant \ell(a) a^k$ et $0 < a < 1$. De plus, pour $k \geqslant p, a^k u_{k-1} \geqslant a^k u_{p-1}$. Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=p}^{n-1} a^k u_{p-1} \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} a^k u_{k-1} \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \ell(a) a^k$$

et donc que

$$\frac{u_{p-1} a^p}{1-a} \leqslant \ell(a) - u_p \leqslant \frac{\ell(a) a^p}{1-a}.$$

Lorsque p tend vers l'infini, $\dfrac{u_{p-1}}{\ell(a)} \leqslant \dfrac{1-a}{\ell(a) a^p} (\ell(a) - u_p) \leqslant 1$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure qu'au voisinage de $+\infty$
$$\ell(a) - u_p \sim \frac{\ell(a)a^p}{1-a}$$

f) En appliquant la minoration précédente avec $p = 3$, il vient
$$\ell(a) \geqslant u_3 + \frac{u_2 a^3}{1-a} \geqslant \frac{u_2 a^3}{1-a}$$
Il s'ensuit que $\lim\limits_{a \to 1^-} \ell(a) = +\infty$.

4. Notons (v_n) la suite (u_n) définie pour $(u_0, u_1) = (1, 0)$ et (w_n) la suite (u_n) définie pour $(u_0, u_1) = (0, 1)$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 v_n + u_1 w_n$. Il s'ensuit que la suite (u_n) converge.

Exercice 1.15.

Soit n un entier naturel non nul.
On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$ et $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{n}$

1. Justifier que A peut s'écrire $X.B$, où B est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant b_0.

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$ (on les écrira sous forme exponentielle). En déduire une factorisation de B puis exprimer b_0 en fonction des racines de B.

3. Calculer le produit des racines de B. En déduire la valeur de p_{2n}.

4. Déterminer la valeur de $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{2n}$.

Solution :

1. En développant A par la formule du binôme, il vient :
$$A = X^{2n} + \cdots + 2nX = X(X^{2n-1} + \cdots + 2n)$$

2. x est racine de A si et seulement si $(x+1)^{2n} = 1$. On obtient donc les $2n$ racines (pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$) :
$$\begin{aligned} x_k &= \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1 = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left[\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right] \\ &= 2i \sin\frac{k\pi}{2n} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

- Pour $k = 0$, on retrouve la racine $x_0 = 0$;
- pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$ et on peut écrire :
$$x_k = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(i\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
qui est l'écriture exponentielle de x_k.

Comme B est de coefficient dominant 1, on peut écrire : $B = \prod_{k=1}^{2n-1}(X - x_k)$.

On obtient donc en développant

$$b_0 = (-1)^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1} x_k = -\prod_{k=1}^{2n-1} x_k.$$

3. En développant le produit des racines on obtient :

$$P = \prod_{k=1}^{2n-1} x_k = 2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(i\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

Soit :

$P = 2^{2n-1}p_{2n}\exp\left(i\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{2n-1}p_{2n}\exp\left(i(2n-1)\frac{\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2^{2n-1}p_{2n}(-1)^{2n-1} = -2^{2n-1}p_{2n}$

On en déduit :

$$p_{2n} = \frac{b_0}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$$

4. On a :

$$p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\times\sin\frac{n\pi}{2n}\times\left(\prod_{k=n}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$

le changement d'indice $j = 2n - k$ dans le deuxième produit donne :

$$p_{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2 \text{ et donc : } \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$